



**PREVISIONI DI ESERCIZIO PER UN TRONCO  
AUTOSTRADALE SOTTO CONDIZIONI NON  
ORDINARIE DI DEFLUSSO**

**Mario Bonfioli**

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale - Università degli Studi di Trento  
Via Mesiano 77, 38100 Trento  
Tel: +39 0461.882539- Fax: +39.0461.882599  
E-mail: [mario.bonfioli@ing.unitn.it](mailto:mario.bonfioli@ing.unitn.it)

**Raffaele Mauro**

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale - Università degli Studi di Trento  
Via Mesiano 77, 38100 Trento  
Tel: +39 0461.882588- Fax: +39.0461.882599  
E-mail: [raffaele.mauro@ing.unitn.it](mailto:raffaele.mauro@ing.unitn.it)

**Luca Silvestri**

Ingegnere Civile - Trento

# **PREVISIONI DI ESERCIZIO PER UN TRONCO AUTOSTRADALE SOTTO CONDIZIONI NON ORDINARIE DI DEFLUSSO**

**MARIO BONFIOLI – Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale –  
Università di Trento**

**RAFFAELE MAURO – Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale –  
Università di Trento**

**LUCA SILVESTRI – Trento**

## **SOMMARIO**

Nel lavoro si presentano i risultati dell'applicazione di un modello macroscopico del deflusso veicolare a problemi di traffico in autostrada che possono risultare di particolare rilevanza nelle previsioni di esercizio delle strade specie in condizioni di emergenza territoriale, quando è richiesta la massima efficienza operativa delle infrastrutture viarie.

Dopo un breve richiamo alle peculiarità del modello utilizzato, si studiano, per diverse condizioni della domanda di traffico, le risposte, in termini di stato del deflusso, di un tronco autostradale alle evenienze rappresentate da un incidente in carreggiata, dal rallentamento delle correnti imposto da un veicolo e dalle variazioni delle caratteristiche dell'infrastruttura per l'instaurarsi di un collo di bottiglia.

Si mostra quindi come, con la determinazione degli andamenti dei parametri di stato del sistema (eg. lunghezza delle code; ritardi dei veicoli interessati dalle evenienze; tempi occorrenti al ripristino delle condizioni di deflusso ex-ante, ecc. ecc.) in funzione di diverse condizioni iniziali di esercizio, sia possibile ottenere informazioni complete e realistiche sull'evoluzione dei fenomeni di traffico indotti dalle perturbazioni considerate.

Questi risultati sono di pratica utilità perché possono essere alla base di strategie di controllo e di intervento sull'infrastruttura.

## **ABSTRACT**

Applications of a macroscopic model of traffic flow (LWR model) are presented in the field of highway traffic operations.

Exemples are given of accident occurrence, bottleneck and veicular slowing down.

It is shown that the LWR model allows to predict state system variables (for instance, queue size, time queue discharge, and shock wave speed) useful to design control and road safe strategies.

## **1. PREMESSA**

In questo lavoro sono presentati i risultati ottenuti dall'applicazione di un modello del deflusso deterministico di tipo macroscopico noto da tempo ma recentemente di nuovo riutilizzato (modello LWR [1] [2] [3]) a tre problemi di esercizio di una infrastruttura autostradale a due corsie per senso di marcia, quali:

- 1) Il verificarsi di un incidente lungo la carreggiata che provoca il blocco momentaneo della circolazione, con sblocco della carreggiata in due fasi successive (apertura della prima corsia e dopo un certo tempo apertura della seconda);
- 2) il rallentamento imposto da un veicolo (veicolo di testa) che fa diminuire bruscamente la velocità media del deflusso;
- 3) il disturbo alla circolazione provocato per un tratto di carreggiata con prestazioni ridotte (ad es. per lavori di manutenzione).

L'analisi è condotta a fini comparativi per due diversi andamenti della curva di deflusso (indicati nel seguito con caso A e caso B), così da potere evidenziare le risposte del sistema ad ingressi diversi.

La schematizzazione utilizzata assimila il comportamento del traffico a quello di un fluido in corrente, ipotizzando la validità di alcune legami tra le variabili di stato (in primis quella di continuità) e ricavando delle equazioni isomorfe a relazioni proprie dell'idrodinamica. Il modello qui impiegato, relativamente alle azioni prescelte, presenta alcuni vantaggi rispetto ad altri approcci:

- per essere una formulazione di tipo *macroscopico* non necessita di uno studio del comportamento del singolo veicolo che è invece tipico degli approcci microscopici.
- trattando di fenomeni che si possono considerare in condizioni di stazionarietà ed omogeneità del deflusso ( proprietà di regolarità ), non è necessario a fini applicativi ricorrere modelli stocastici.
- questo modello presenta inoltre caratteri di semplicità ed eleganza formale, che ne rendono l'implementazione agevole e permettono una comprensione e valutazione immediata delle risposte: si dispone in altre parole di uno strumento di caratteristiche spiccatamente ingegneristiche.

Prima di procedere con l'analisi del modello impiegato si sottolinea che esso , come tutti i modelli deterministici, è basato sulle relazioni *in media* fra le variabili del deflusso; ciò significa considerare non significativa la dispersione attorno al proprio valor medio dei parametri di stato.

## 2. IL MODELLO IMPIEGATO

Si suppone innanzitutto che le variabili macroscopiche del deflusso, ovvero densità, portata e velocità, siano esprimibili mediante funzioni continue e derivabili  $\mathbf{k}(\mathbf{x},t)$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$  (ipotesi di continuità del flusso). Si ridefiniscono perciò portata, densità e velocità "in media spazio-temporale", cioè su un dominio nel piano spazio-tempo. Se il dominio è rettangolo di area LT [4], si definisce quindi *portata spazio-temporale*  $\mathbf{q}_{st}$  la media pesata sulla lunghezza L delle portate puntuali  $\mathbf{q}_i$  registrabili all'interno di L. E' facilmente dimostrabile che:

$$\mathbf{q}_{st} = \frac{\sum_1^e s_i}{TL} = \frac{d(A)}{|A|} \quad (1)$$

dove  $s_i$  è la lunghezza della traiettoria del generico veicolo  $i$  in LT,  $d(A)$  il percorso totale compiuto all'interno di LT da tutti i veicoli ivi contenuti e  $|A|$  è l'area del dominio LT. La (1b) coincide con la "forma generalizzata per la portata", introdotta da Edie in [5].

Analogamente si può definire una *densità spazio-temporale*  $\mathbf{k}_{st}$  come la media pesata sull'intervallo temporale T di tutte le densità istantanee  $\mathbf{k}_j$  osservabili in T. Si ottiene:

$$\mathbf{k}_{st} = \frac{\sum_1^e t_i}{TL} = \frac{t(A)}{|A|} \quad (2)$$

Dove  $t_i$  è il tempo di permanenza del generico veicolo  $i$  nel dominio  $LT$ , e  $t(A)$  la somma degli stessi.

Si definisce *velocità media spazio-temporale*  $\mathbf{v}_{st}$  il rapporto fra la somma di tutti i percorsi compiuti dagli  $e$  veicoli all'interno dell'area  $LT$  e la somma dei tempi spesi dagli stessi nel dominio in questione:

$$\mathbf{v}_{st} = \frac{\sum_1^e s_i}{\sum_1^e t_i} = \frac{d(A)}{t(A)} = \frac{\mathbf{q}_{st}}{\mathbf{k}_{st}} \quad (3)$$

E' immediato verificare la sussistenza della relazione:

$$\mathbf{q}_{st} = \mathbf{k}_{st} \mathbf{v}_{st}$$

Per pervenire alla forma continua di portata, densità e velocità si procede poi con un opportuno passaggio al limite di  $A$ , previa definizione di una funzione di conteggio dei veicoli  $\tilde{n}(x,t)$  (per questa trattazione, più formale che sostanziale, si rimanda a [6]).

Per comodità di notazione non si riporterà il pedice  $_{st}$ , scrivendo semplicemente portata

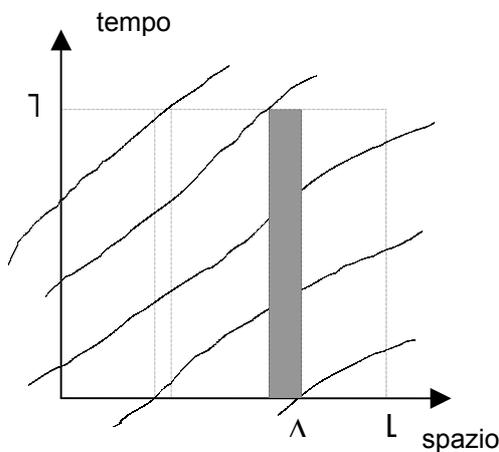


Figura 1

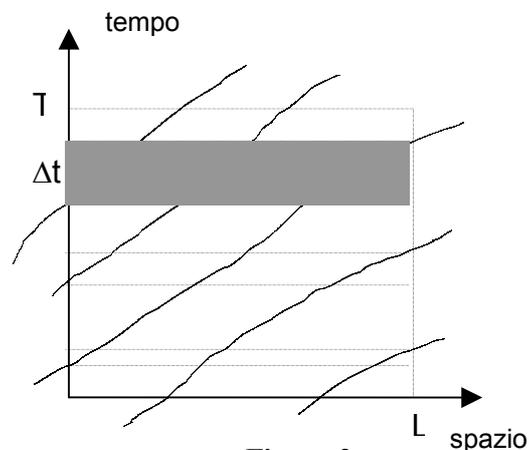


Figura 2

densità e velocità come  $q$ ,  $k$ ,  $v$  e sottintendendo che esse sono medie spazio-temporali dal significato appena sopra illustrato.

In analogia con un mezzo continuo si suppone che valga un'equazione di conservazione, isomorfa all'equazione di continuità della massa, che in forma differenziale è espressa nel seguente modo in assenza di ingressi o uscite lungo il tratto infinitesimo  $dx$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Si ipotizza infine che si possa esprimere una relazione tra  $q$  e  $k$  (curva caratteristica) tipica delle condizioni di equilibrio locale. Queste ipotesi risultano realistiche per lunghi tratti stradali esaminati su macroscale ([6]).

Il problema differenziale (4) viene affrontato e risolto con strumenti matematici quali il metodo delle caratteristiche ben noti in meccanica dei fluidi. Per una trattazione esauriente dei fondamenti concettuali del metodo e della sua applicazione a modelli di deflusso si rimanda a [7].

Ciò che qui conta sottolineare è come la teoria permetta di ricavare le modalità di propagazione delle perturbazioni a monte e a valle del deflusso veicolare: è possibile in altre parole descrivere gli effetti dei cambiamenti repentini, in questo modello considerati istantanei, in termini di densità, portata e velocità.

La perturbazione infinitesima si propaga infatti con la seguente velocità:

$$c = dq/dk \quad (5)$$

e analogamente una perturbazione finita si propaga con velocità:

$$u = \frac{dx_s}{dt} = \frac{q(x_1, t) - q(x_2, t)}{k(x_1, t) - k(x_2, t)} = \frac{[q]}{[k]} \quad (6)$$

La perturbazione finita è nota come “onda di shock”

Sul diagramma fondamentale la velocità della perturbazione è data dalla pendenza della tangente in un punto (perturbazione infinitesima) o della secante che congiunge i due stati del deflusso a monte e a valle dello shock stesso (perturbazione finita) (figure 3,4,5).

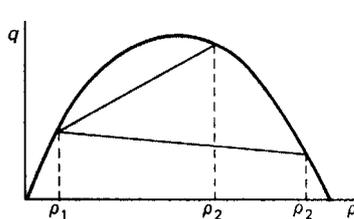


Figura 3

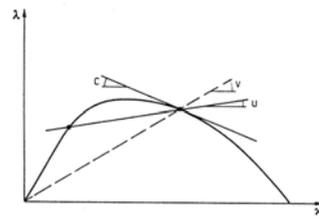


Figura 4

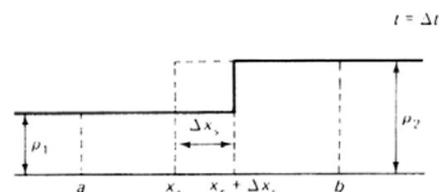


Figura 5

In figura 3 sono evidenziate due possibili onde di shock ( $\rho$  è la densità).

In figura 4 sono evidenziati gli elementi della cinematica degli shock ( $\lambda$  è la portata,  $\chi$  è la densità).

In figura 5 è mostrata una semplice onda di shock che si propaga tra due stati caratterizzati da densità costante  $\rho_1$  e  $\rho_2$ .

### 3. PROBLEMI DI ESERCIZIO IN AUTOSTRADA

Il modello prima sintetizzato è applicato a tre casi concreti, già elencati nella premessa, relativi a tipiche evenienze di esercizio di una infrastruttura autostradale. Viene effettuato un confronto tra i comportamenti del sistema sotto due coppie di ingressi rappresentati dagli andamenti delle relazioni  $q=q(k)$  e  $v=v(k)$  di fig. 6 e fig. 7.

All'interno di questi andamenti possono realisticamente pensarsi comprese le relazioni  $q=q(k)$  e  $v=v(k)$  tipiche del funzionamento della maggior parte delle strade a carreggiate separate attualmente in esercizio.

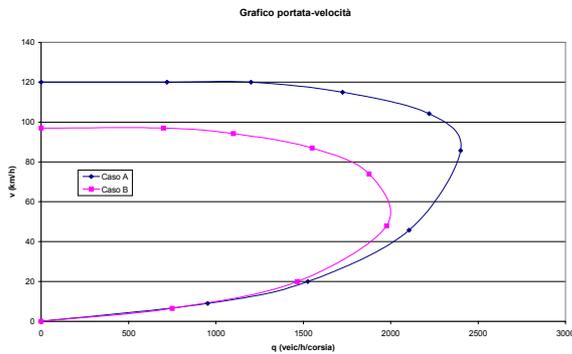


Figura 6

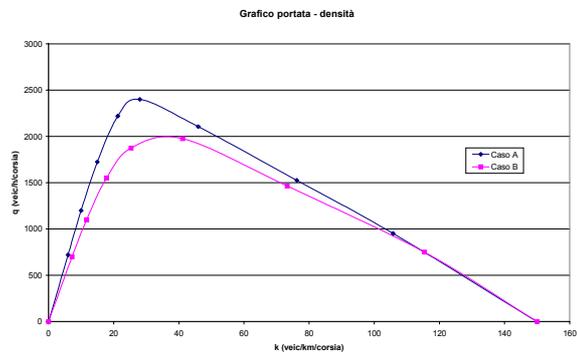


Figura 7

### 3.1 Incidente in autostrada.

Si analizzano di seguito, secondo l'indirizzo contenuto in [8], gli effetti di un incidente lungo la carreggiata di un'autostrada e la loro propagazione nello spazio e nel tempo.

Si consideri il tratto autostradale a due corsie per senso di marcia rappresentato in figura 8 e caratterizzato dalle condizioni di circolazione  $q_A$  e  $v_A$ .

Si immagina che in un certo istante (nell'esempio in esame corrispondente a  $t=0$ ) nella sezione stradale contrassegnata dalla lettera B avvenga un incidente che causa il blocco della carreggiata da parte dei veicoli che ne sono coinvolti.

La sezione B è posta a una distanza  $L$  dalla sezione A, situata a monte della prima e corrispondente al terminale della corsia di ingresso in autostrada più vicina al sito dell'incidente (vedi figura 8).

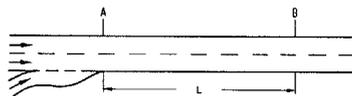


Figura 8

Si suppone che dopo un certo tempo  $\Delta t_{interv 1}$  venga liberata una corsia, permettendo in questo modo la ripresa della circolazione oltre B, seppure a flusso ridotto pari a  $q_{B-1lane}$ .

Dopo un ulteriore periodo di tempo,  $\Delta t_{interv 2}$ , viene liberata la seconda corsia: a questo punto il deflusso attraverso B avviene in condizioni di capacità, cioè in condizioni di massima portata, pari a  $q_{B-2lanes}$ . L'ipotesi è giustificata dal fatto che alla riapertura della seconda corsia i veicoli tendono a ripristinare le condizioni di marcia che erano presenti a monte della zona interessata dal disturbo causato dall'incidente; poichè questa transizione non è istantanea, essa è schematizzata mediante un passaggio intermedio, corrispondente alla condizione di capacità (si può dire che mediamente i conducenti vogliono ottimizzare le condizioni di deflusso attraverso B).

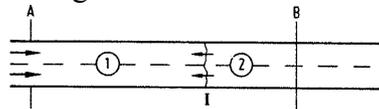
Mediante l'utilizzo del modello LWR si ricerca una soluzione ai seguenti problemi:

- 1) localizzazione della fine della coda nel momento in cui viene liberata la prima corsia (e quindi dopo  $\Delta t_{interv 1}$ )  $x_1$ ;

- 2) il tempo necessario a partire da  $t=0$  a che i veicoli sopraggiungenti non debbano più accodarsi  $\Delta t_{ult}$  ;
- 3) la massima dimensione raggiunta della coda (misurata dalla testa al termine), ovvero il suo massimo sviluppo  $S_{max}$  ;
- 4) la massima distanza del fronte posteriore della coda dal luogo dell'incidente nel propagarsi di detto fronte all'indietro una volta sbloccata una carreggiata  $D_{max}$  ;
- 5) il tempo occorrente al ripristino completo della carreggiata (ovvero la riapertura di entrambe le corsie) per evitare che gli effetti dell'incidente si risentano – in termini di disturbo delle condizioni di deflusso – nella corsia di immissione (sezione A) (situazione di “rigurgito”)  $t_{max}$  .

L'incidente, e la repentina chiusura della carreggiata, provoca la formazione di un'onda di shock che causa il passaggio dalle condizioni di deflusso in condizioni indisturbate 1 ( $q_A$  e  $v_A$ ) alle condizioni di blocco della circolazione 2 ( $q=0$ ,  $v=0$ ,  $k=k_{max}$ =massima densità veicolare realizzabile).

La situazione è schematizzata in figura 9.



**Figura 9**

La velocità di quest'onda di shock (I), è data dalla relazione

$$u_I = \frac{q_1 - q_2}{k_1 - k_2} \quad (7)$$

dove  $q_1=q_A$  ,  $q_2=0$  ,  $k_1=q_A/v_A$  e  $k_2=k_{max}$ .

La (I) si propaga sempre in direzione opposta al deflusso (il denominatore è chiaramente minore 0 mentre il numeratore è sempre positivo o al più nullo nel caso poco significativo in cui  $q_A$  sia pari al valore nullo).

Seguendo il moto della (I) si segue la fine della coda; quindi la risposta al problema 1) è data dal calcolo del percorso compiuto dalla (I) dopo un periodo di tempo pari a  $\Delta t_{interv 1}$  minuti:

$$x_I = u_I (\Delta t_{interv 1}/60) \quad (8)$$

Dopo  $\Delta t_{interv 1}$  si forma, e parte all'indietro dal sito dove è avvenuto l'incidente (posto in  $x=0$ ), una seconda onda di shock (II) che separa le condizioni di deflusso bloccato (2) da quelle di deflusso attraverso una sezione ristretta a una sola corsia (-3-, cioè  $q_3= q_{B-1lane}$  ,  $v_{B-1lane}$  ,  $k_3= q_{B-1lane}/ v_{B-1lane}$ ).

La situazione è quindi quella illustrata in figura 10 e la velocità della (II) diviene:

$$u_{II} = \frac{q_2 - q_3}{k_2 - k_3} \quad (9)$$

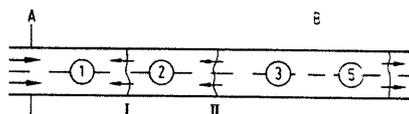


Figura 10

La condizione di deflusso 5 è quella che incontrano i veicoli che superano la sezione B corrispondente praticamente alle condizioni di deflusso libero a causa del fatto che i veicoli che precedevano quelli coinvolti nell'incidente si sono talmente allontanati che la densità veicolare a valle di B si può certamente considerare minore di quella presente prima del verificarsi dell'incidente ( $k_A$ ) e pari a un valore molto basso.

Quando la (II) raggiunge la (I) la coda si esaurisce (il gruppo dei veicoli che ripartono ha raggiunto quello dei veicoli che si stanno fermando) e tutti i veicoli possono considerarsi in moto. Quindi la risposta al problema 2) si ottiene valutando la coordinata *temporale* del punto di intersezione (sul piano spazio-tempo) delle onde di shock (I) e (II), pari a  $\Delta t_{ult}$ .

Per quanto riguarda invece il problema 3) si osserva come la coda raggiunga il suo massimo sviluppo nell'istante in cui viene liberata una corsia (e quindi in  $\Delta t_{interv. 1}$ ): infatti dopo questo istante comincia lo smaltimento della coda ad opera di (II). Quindi il massimo sviluppo della coda  $S_{max}$  coincide con il valore di  $x_1$  ricavato per il problema 1).

Per risolvere il problema 4), bisogna valutare la coordinata *spaziale*  $D_{max}$  del punto di intersezione (nel piano spazio-tempo) delle onde di shock (I) e (II) perché, come già evidenziato, è in questo punto che la coda si esaurisce.

L'incontro della (I) con la (II) genera una nuova onda di shock (III) che separa le condizioni di deflusso 1 ( $q_A$  e  $v_A$ ) dalle condizioni di deflusso 3 ( $q_3 = q_{B-1lane}$ ,  $v_{B-1lane}$ ,  $k_3 = q_{B-1lane} / v_{B-1lane}$ ). La sua velocità risulta:

$$u_{III} = \frac{q_1 - q_3}{k_1 - k_3} \quad (10)$$

La (III) solitamente si propaga in direzione opposta al deflusso (in esito a ciò ivi si ritroverà un aumento di densità) poiché in genere  $q_1 > q_3$ , ma questa occorrenza può anche non verificarsi.

Quando finalmente viene sgomberata anche la seconda corsia, si produce una quarta onda di shock (IV) che ha origine, ovviamente, nella sezione B; essa segna il passaggio dalle condizioni di deflusso 3 ( $q_3 = q_{B-1lane}$ ,  $v_{B-1lane}$ ,  $k_3 = q_{B-1lane} / v_{B-1lane}$ ) alle condizioni di deflusso 4 ( $q_4 = q_{B-2lanes}$ ,  $v_{B-2lanes}$ ,  $k_4 = q_{B-2lanes} / v_{B-2lanes}$ ) e quindi la sua velocità sarà negativa (si propaga in direzione opposta al deflusso) e pari a:

$$u_{IV} = \frac{q_3 - q_4}{k_3 - k_4} \quad (11)$$

Con lo sblocco della seconda corsia, si genera assieme a (IV) una ulteriore onda di shock (VI) che si propaga verso valle. Essa rappresenta il passaggio dalla condizione di deflusso 4 alla condizione di deflusso 5 ( $q_5 = q_C < q_A$ ,  $v_5 = v_C > v_A$ ,  $k_5 = q_5 / v_5$ ) ed ha quindi velocità pari a:

$$u_{VI} = \frac{q_4 - q_5}{k_4 - k_5} \quad (12)$$

che è chiaramente positiva ( $q_4 > q_5$  e  $k_4 > k_5$ ). La situazione che si crea dopo lo sblocco della seconda corsia è schematizzata in figura 11.

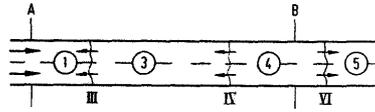


Figura 11

La (IV) raggiungerà la (III) dopo un certo tempo  $t_{III-IV}$  dall'istante dell'incidente e ad una distanza  $x_{III-IV}$  da esso, valori che possono essere valutati ricercando sul piano spazio-tempo le coordinate del punto di intersezione tra (III) e (IV).

In questo punto si genera una nuova onda di shock (V) che rappresenta il passaggio dalle condizioni di deflusso 1 ( $q_A, v_A$ ) alle condizioni di deflusso 4 ( $q_4 = q_{B-2lanes}, v_B - 2lanes, k_4 = q_{B-2lanes} / v_{B-2lanes}$ ); la sua velocità è quindi pari a:

$$u_v = \frac{q_1 - q_4}{k_1 - k_4} \quad (13)$$

ed essendo chiaramente positiva ( $k_1 < k_4$  e  $q_1 < q_4$ ) si propaga verso valle.

Si osserva che, essendo  $u_{VI} > u_v$  la (VI) e la (V) non si incontreranno mai.

Per quanto riguarda il problema 5 bisogna distinguere anzitutto il caso in cui la velocità della (III) assume valore negativo e quello in cui assume valore positivo, poiché nei due casi l'evento critico può essere l'apertura di entrambe le corsie oppure di una sola. Si indicano ora con caso A e caso B le risposte che il modello fornisce in corrispondenza degli omologhi input delle figure 7 ed 8.;  $t$  indica il tempo in cui viene effettuato lo sgombero della prima corsia.

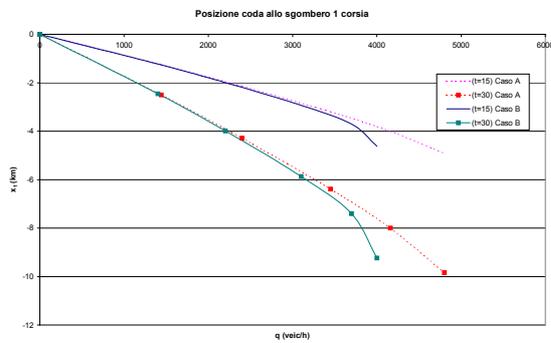


Figura 12

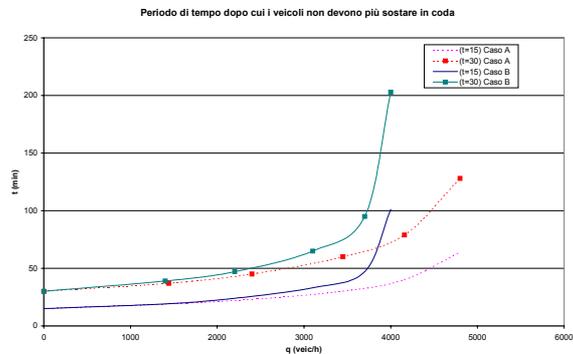


Figura 13

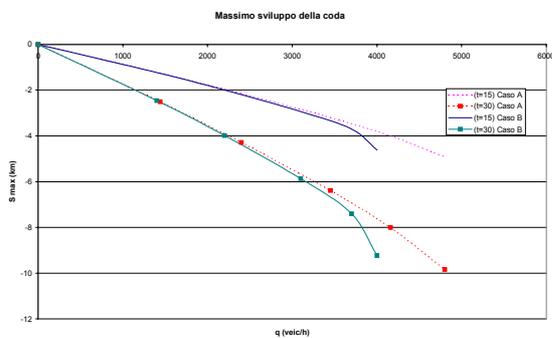


Figura 14

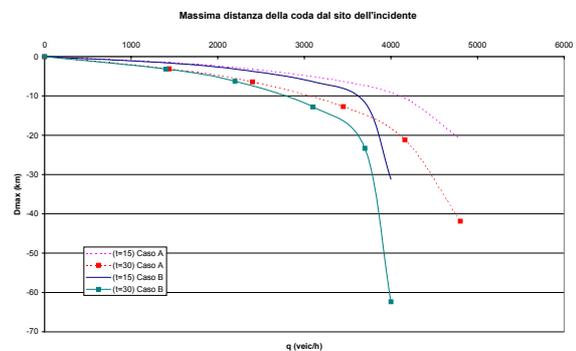


Figura 15

Nelle figure 12 e 14 si nota come tra il caso A e il caso B ci sia poca differenza in termini di posizione della coda  $x_1$  allo sgombero della prima corsia e di sviluppo massimo della coda; questa differenza è significativa (qualche km) solo per valori di portata vicini alla capacità.

In figura 13 si evidenzia un migliore comportamento del caso A; i veicoli ripartono prima, specie nei pressi delle condizioni critiche (capacità).

In figura 15 si evidenzia come la distanza della coda dal sito dell'incidente (estensione della perturbazione) sia decisamente più marcata nel caso B per elevati valori di portata.

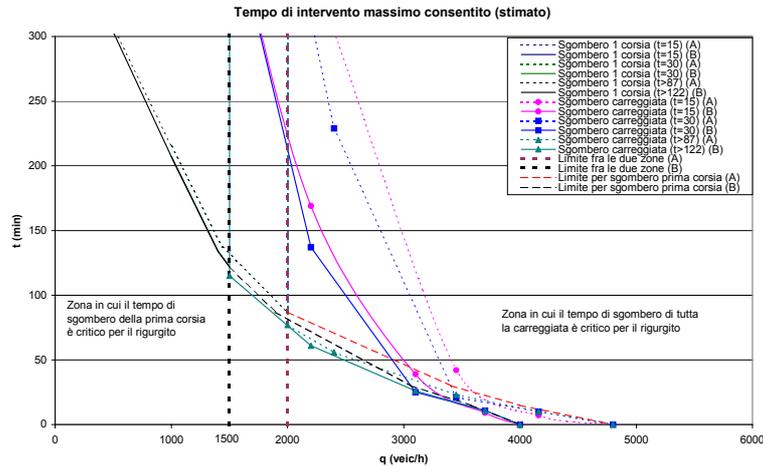


Figura 16

In figura 16 è rappresentato per vari tempi di sgombero della prima corsia, qual è il tempo massimo di intervento; a seconda della portata si distinguono due zone (diverse nel caso A e nel caso B): una in cui l'evento critico è lo sgombero della prima corsia (poiché il sistema successivamente funziona come un collo di bottiglia lontano dalla capacità), l'altra in cui l'evento critico è lo sgombero di tutta la carreggiata (poiché viene superata la capacità del collo di bottiglia). Il caso A consente tempi di intervento maggiori a parità di evento critico.

### 3.2 Rallentamento imposto da un veicolo.

In questo punto si riportano per brevità i soli risultati, secondo l'indirizzo contenuto in [9], dell'applicazione del modello RWL delle condizioni di deflusso in un tratto autostradale (con un qualsiasi numero di corsie) quando all'istante  $t=0$  l'utente di un veicolo (*veicolo di testa*) decide di diminuire la sua velocità di marcia da  $v_A$  a  $v_B$ , mantenendola per un periodo di tempo pari a  $T$  e costringendo i veicoli che seguono (che si ipotizza non siano messi in condizione di effettuare il sorpasso) a rallentare a loro volta per adeguarsi alla velocità ridotta  $v_B$ .

Si definiscono con A le condizioni iniziali di deflusso ( $q_A$ ,  $k_A$ ,  $v_A$ ) e con B le condizioni di deflusso corrispondenti alla velocità ridotta  $v_B$  ( $q_B$ ,  $k_B$ ,  $v_B$ ); la velocità  $v_B$  è tale che si verifica la relazione  $q_A > q_B$  (quindi a seguito del rallentamento viene penalizzata la portata smaltita; l'effetto del rallentamento è più gravoso per il funzionamento dell'infrastruttura rispetto a un semplice ritardo accumulato dai veicoli sopraggiungenti).

All'istante  $t=T$  il veicolo di testa inizia a riportarsi alle primitive condizioni di deflusso. Mediante l'utilizzo del modello LWR, si cerca una soluzione ai seguenti problemi:

- 1) valutazione della massima distanza  $s(\mathbf{X})$  raggiunta dalla perturbazione (delle condizioni iniziali di deflusso) rispetto al luogo di inizio del rallentamento (posto in  $x=0$ );
- 2) valutazione della durata della perturbazione  $t(\mathbf{Z})$ , misurata dall'inizio del rallentamento fino all'istante in cui cessa ogni effetto della perturbazione (sempre in termini di rallentamento dei veicoli che sopraggiungono);
- 3) stima del numero dei veicoli  $n$  complessivamente interessati dalla perturbazione;
- 4) stima del ritardo maturato dal veicolo  $i$ -esimo  $D_i$  all'uscita della zona perturbata, comprendente le zone (B) e (C) in cui  $v < v_A$ ; con  $i=1$  si intende il veicolo di testa;
- 5) il numero del primo veicolo non ritardato  $i^*$ .

Si indicano ora con caso A e caso B le risposte che il modello fornisce in corrispondenza degli omologhi input delle figure 7 ed 8 nelle ipotesi che  $T = 10$  min e  $v_B = 20$  km/h.

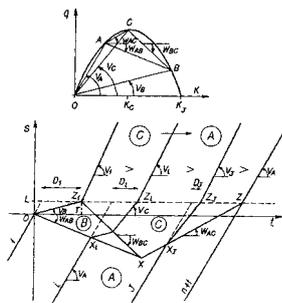


Figura 17

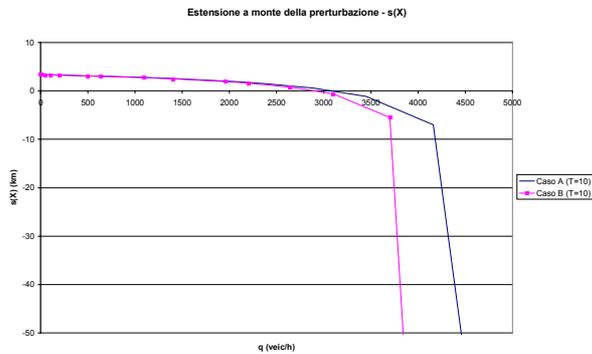


Figura 18

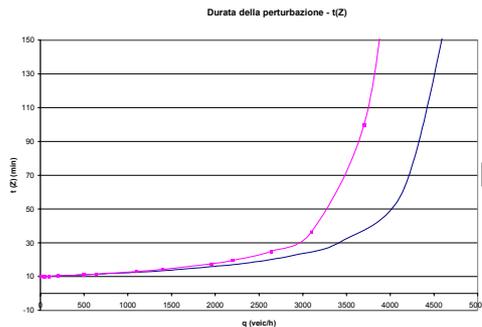


Figura 19

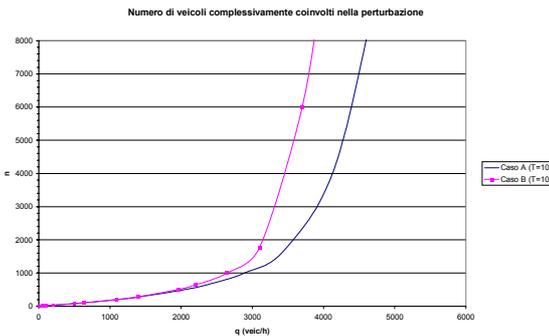
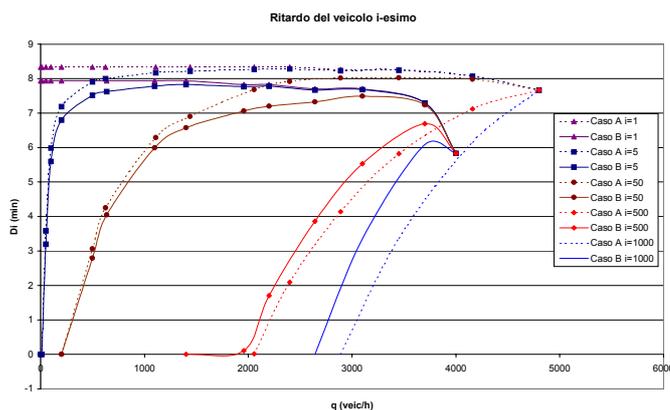


Figura 20



**Figura 21**

Dalla figura 18 si nota come la perturbazione si estenda a monte maggiormente nel caso B, in modo particolare per alti valori di portata.

Dalla figura 19 si vede invece come la durata della perturbazione cresca iperbolicamente, fino a diventare asintotica per la capacità; il caso più gravoso è il caso B.

In figura 20 si evidenzia come il numero di veicoli coinvolti nella perturbazione cresca iperbolicamente all'aumentare della portata; il caso B impegna più veicoli a parità di portata.

In figura 21 si può leggere il ritardo medio maturato dal veicolo  $i$ -esimo; questo è maggiore nel caso A rispetto al caso B per i primi veicoli. Ciò dipende quasi esclusivamente dalla più elevata perdita di velocità dovuta alle maggiori velocità medie che si attuano sulle infrastrutture caratterizzate da una curva di deflusso del tipo A (confronta figura 6 e 7).

Per i veicoli a indice più elevato si hanno invece ritardi minori nel caso A, poiché diventa significativa la maggiore portata smaltita in condizioni di capacità rispetto alla perdita di velocità.

### 3.3 Tratto a prestazioni ridotte.

In questo punto si analizzano, secondo l'indirizzo contenuto in [9], gli effetti sul deflusso causati dalla presenza lungo il tracciato autostradale di un tratto lungo  $L$  nel quale le caratteristiche dell'infrastruttura consentono ridotte prestazioni in termini di velocità e di volumi smaltiti.

Questo fenomeno è altresì noto con il nome di "collo di bottiglia" e può ricorrere con una certa frequenza nelle condizioni di esercizio dell'infrastruttura in quanto può essere causato, per esempio, dal restringimento di carreggiata dovuto alla presenza di un cantiere, o al verificarsi di un incidente.

La presenza di questo tratto a prestazioni ridotte è schematizzato nel modello LWR (e in generale in tutti i modelli macroscopici di deflusso) con il passaggio da una curva di deflusso caratterizzata dal valore  $q_C = q_{C1}$  della capacità a una curva di deflusso che consente una capacità  $q_{C2}$  inferiore; si veda ad esempio la figura 22, che considera una variazione di capacità per un tratto dell'infrastruttura in esame senza però che vi sia variazione del numero di corsie percorribili (e questo è evidente per il fatto che la densità massima realizzabile  $k_j$  è la medesima per entrambe le curve).

Nell'ipotesi di avere a monte una domanda di traffico  $q_A$  costante nel tempo (almeno per il periodo di tempo simulato), si cercherà una soluzione ai seguenti problemi:

- 1) la valutazione della lunghezza della zona perturbata (in termini di velocità media di deflusso) incontrata dal veicolo i-esimo  $s(X_i)$ ;
- 2) la stima del ritardo  $D_i$  maturato dal veicolo i-esimo al termine del tronco L (quello con le caratteristiche variate)
- 3) la stima del tempo necessario per il recupero del ritardo  $D_i$ ,  $\beta_i$ ;
- 4) la stima dello spazio necessario per il recupero del ritardo  $D_i$ ,  $\zeta_i$ ;
- 5) la stima del ritardo medio dei primi i veicoli,  $D_{i \text{ medio}}$ ;
- 6) la stima del ritardo cumulato dei primi i veicoli  $D_{i \text{ TOT}}$ .

Analizziamo anzitutto il caso in cui il flusso in arrivo  $q_A$  sia maggiore della capacità  $q_{C2}$  smaltibile dall'infrastruttura nel tratto lungo L; in una situazione di questo tipo, il flusso che si può trovare all'imbocco della zona a ridotta capacità è pari al massimo a  $q_{C2}$  e quindi a monte della strettoia si instaurerà una nuova condizione di deflusso, B ( $q_B = q_{C2}$ ,  $k_B$ ,  $v_B$ ), mentre lungo il tratto L si realizzerà la condizione di deflusso C2 ( $q_{C2}$ ,  $k_{C2}$ ,  $v_{C2} = v_{C \text{ rid}}$ ) (cfr. figura 22).

La transizione dalla condizione di deflusso iniziale A alla B avverrà lungo un'onda di shock (AB) che ha origine all'imbocco del collo di bottiglia nell'istante in cui il primo veicolo vi entra; la sua velocità è pari a:

$$W_{AB} = \frac{q_A - q_B}{k_A - k_B} \quad (22)$$

che è minore di zero in quanto  $q_A > q_B = q_{C2}$  e  $k_A < k_B$  e quindi si propagherà in direzione opposta rispetto al deflusso.

Al termine del restringimento (che è percorso da tutti i veicoli nel medesimo tempo  $T=L/v_{C2}$ ) il flusso  $q_{C2}$  si immette nella primitiva infrastruttura che consente una marcia in condizioni di deflusso pari a D ( $q_D = q_{C2}$ ,  $k_D$ ,  $v_D > v_A$ ), come risulta immediatamente dall'analisi delle curve q-k di figura 8-1 (è evidente che si instaurino a valle le condizioni D e non le B, poiché la densità che incontrano i veicoli rilasciati dal collo di bottiglia è minore della densità realizzata lungo questo).

Viaggiando in condizioni di deflusso D, e quindi con velocità  $v_D > v_A$  (con  $v_A$  pari alla velocità media attuata a monte in condizioni indisturbate), i veicoli possono recuperare il ritardo maturato.

Una volta riassorbito il ritardo, si ipotizza un ritorno alle condizioni di deflusso A e questa circostanza comporta la presenza di una nuova onda di shock (DA) che segna il passaggio dalle condizioni D alle condizioni A.

Il primo veicolo recupererà il suo ritardo nel punto  $Y_1$  del piano spazio-temporale; in quel punto nasce la (DA) che si propaga con una velocità pari a:

$$W_{DA} = \frac{q_D - q_A}{k_D - k_A} \quad (23)$$

che è positiva essendo  $q_D < q_A$  e  $k_D < k_A$  e quindi si dirige verso valle rispetto a  $s(Y_1)$ .

Questo fatto comporta che i veicoli seguenti il primo, che hanno incontrato ancora più a monte la perturbazione, riusciranno a recuperare il ritardo sempre più a valle, rendendo così il recupero sempre più differito nel tempo e nello spazio.

Analizzata la dinamica del fenomeno, si possono ora risolvere i problemi posti precedentemente.

Per quanto riguarda il problema 1), la lunghezza della zona perturbata incontrata dal veicolo i-esimo  $s(X_i)$  si può valutare mediante il calcolo della coordinata spaziale del

punto  $X_i$ , dato dall'intersezione dell'onda di shock (AB) con il diagramma orario del veicolo  $i$ -esimo; questa coordinata è data dalla seguente formula:

$$s(X_i) = \frac{(i-1)(q_A - q_B)}{(q_B k_A - q_A k_B)} \quad (24)$$

Per quanto riguarda invece il ritardo  $D_i$  maturato dal veicolo  $i$ -esimo al termine del tronco L, esso si ottiene da

$$D_i = (i-1) \left( \frac{1}{q_B} - \frac{1}{q_A} \right) + L \left( \frac{1}{v_{C2}} - \frac{1}{v_A} \right) \quad (25)$$

La somma viene effettuata solo su  $(i-1)$  veicoli perché il primo veicolo non percorre alcun tratto di strada in condizioni di deflusso B, ma percorre a velocità ridotta solo il tratto L del collo di bottiglia.

Il tempo necessario al recupero del ritardo  $D_i$  (problema 3) è immediatamente dato dallo spazio che il veicolo avrebbe percorso in  $D_i$  se avesse viaggiato a velocità costante  $v_A$  sulla “velocità di recupero”, data dalla differenza tra  $v_D$  e  $v_A$  (si tratta insomma di un problema di moto relativo); quindi:

$$\beta_i = \frac{D_i v_A}{(v_D - v_A)} \quad (26)$$

Invece, lo spazio necessario a questo recupero (problema 4) sarà dato da:

$$\zeta_i = \frac{D_i}{\frac{1}{v_A} - \frac{1}{v_D}} \quad (27)$$

come si può vedere anche graficamente in figura 22. Infatti  $\zeta_i$  è pari a  $\beta_i v_D$ .

Il ritardo medio dei primi  $i$  veicoli  $D_{i \text{ medio}}$  (problema 5) si può valutare mediante la:

$$D_{i \text{ medio}} = \frac{D_1 + D_i}{2} = \frac{(i-1)}{2} \left( \frac{1}{q_B} - \frac{1}{q_A} \right) + L \left( \frac{1}{v_{C2}} - \frac{1}{v_A} \right) \quad (28)$$

operando quindi la media aritmetica tra il ritardo accumulato dal primo veicolo e dall'ultimo veicolo.

Per quanto riguarda il problema 6),  $D_{i \text{ TOT}}$  si valuta sommando tra loro i ritardi dei primi  $i$  veicoli; perciò:

$$D_{i \text{ TOT}} = \sum_1^i D_j = i \left[ \frac{(i-1)}{2} \left( \frac{1}{q_B} - \frac{1}{q_A} \right) + L \left( \frac{1}{v_{C2}} - \frac{1}{v_A} \right) \right] \quad (29)$$

Nel caso in cui  $q_A = q_{C2}$  (condizioni di funzionamento pari alla capacità massima del collo di bottiglia), si osserva come le condizioni di deflusso A e D coincidano; quindi l'onda di shock (DA) non si genererà più e il ritardo non potrà più essere recuperato (basta notare che  $v_A = v_D$  per convincersi di questa circostanza) (problemi 3) e 4).

L'onda di shock (AB) rimane stazionaria in  $s=0$  e quindi  $s(X_i)$  sarà sempre pari a zero (problema 1)), mentre il ritardo maturato dal veicolo generico sarà costante per tutti e pari a  $L(1/v_{C2} - 1/v_A)$ , cioè pari al tempo perso percorrendo il collo di bottiglia lungo  $L$  a velocità ridotta  $v_{C2} = v_{Crid}$ ; questo ritardo costante per ogni veicolo è chiaramente coincidente anche col ritardo medio dei primi  $i$  veicoli (problemi 2) e 5)).

Il ritardo cumulato dei primi  $i$  veicoli sarà chiaramente pari a  $i$  volte il ritardo del singolo veicolo.

Nel caso in cui  $q_A < q_{C2}$  allora il problema si semplifica ulteriormente; si è infatti in presenza di una situazione non critica, in cui cioè la domanda di traffico è inferiore alla capacità smaltibile dal tratto di autostrada a prestazioni ridotte.

Le condizioni di deflusso D e B in questo caso perdono di significato: infatti non si realizzano mai poiché fino all'imbocco del collo di bottiglia si hanno le condizioni A ( $q_A < q_{C2}$ ,  $k_A$ ,  $v_A$ ), mentre nel collo di bottiglia si hanno le condizioni  $C_{rid}$  ( $q_{Crid} = q_A$ ,  $k_{Crid} < k_{C2}$ ,  $v_{Crid} < v_A$ ) caratterizzate da una velocità media di deflusso minore e localizzate nella zona del grafico ridotto  $q-c$  corrispondente alle condizioni di deflusso parzialmente forzato o libero.

Alla luce di queste considerazioni, si può dare soluzione ai problemi posti in precedenza nel seguente modo.

Problema 1):  $s(X_i)$  assume valore 0 (non c'è propagazione della zona perturbata).

Problema 2):  $D_i$  costante e pari a  $L(1/v_{Crid} - 1/v_A)$ , cioè pari al tempo perso nel percorrere il tratto  $L$  a velocità ridotta  $v_{Crid}$  invece che con velocità media in condizioni indisturbate  $v_A$ .

Problema 3) e problema 4): non si recupera il ritardo in quanto i veicoli una volta usciti dal collo di bottiglia riprendono la marcia nelle condizioni di deflusso A ( $q_A = q_{Crid}$ ,  $k_A$ ,  $v_A$ ), non attuando quindi velocità maggiori e non riuscendo di conseguenza a recuperare il ritardo accumulato.

Problema 5):  $D_{i\text{ medio}}$  è chiaramente pari a  $D_i =$  costante.

Problema 6):  $D_{i\text{ TOT}}$  è pari a  $i$  volte  $D_i =$  costante.

Di seguito vengono confrontati i due casi nell'ipotesi  $L = 1$  km,  $q_{c2} = 2250$  viec/h (caso A),  $q_{c2} = 1875$  viec/h (caso B) e chiusura lungo  $L$  di una corsia per il movimento di uomini e mezzi (per esempio nell'ambito delle attività di un cantiere).

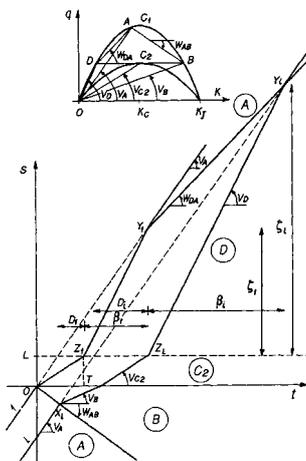


Figura 22

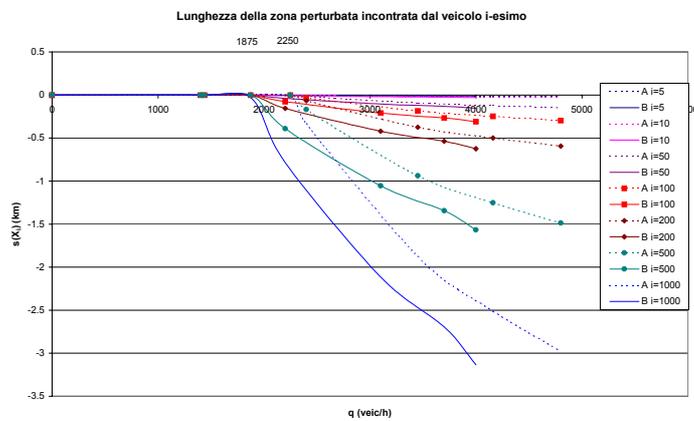


Figura 23

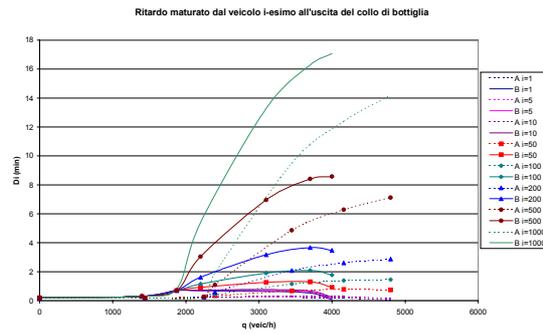


Figura 24

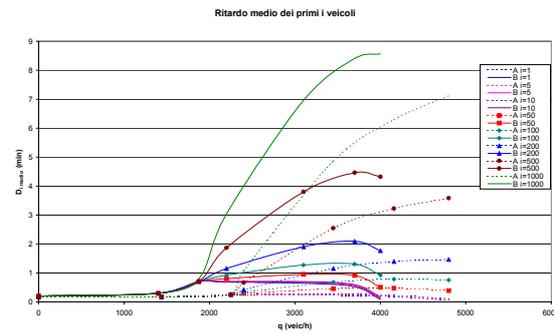


Figura 25

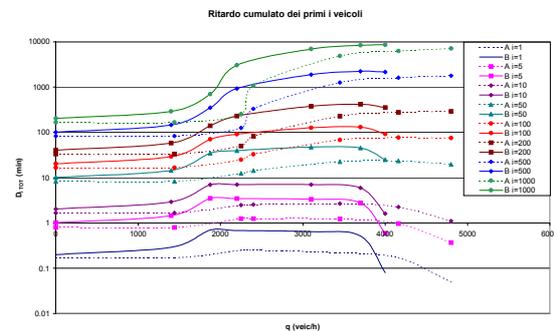


Figura 26

Dalla figura 23 risulta come in termini di lunghezza della zona perturbata incontrata dal veicolo  $i$ -esimo  $s(X_i)$  si abbia un miglior comportamento nel caso A, che presenta, a parità di portata, lunghezze minori, e ciò grazie alle più favorevoli condizioni di deflusso che si realizzano.

Dalla figura 24 si nota come anche il ritardo maturato dal veicolo  $i$ -esimo all'uscita del collo di bottiglia sia minore nel caso A, a parità di portata, sempre grazie alle migliori condizioni di circolazione (in termini di velocità attuate) a parità di portata.

Le figure 25 e 26 mostrano infine come ritardi medi e cumulati siano minori nel caso A.

#### 4. CONCLUSIONI.

Nel lavoro si è esemplificata l'applicazione di un modello macroscopico del deflusso veicolare alle previsioni di esercizio per un tronco autostradale in condizioni non ordinarie di funzionamento, quali quelle che si instaurano per il rallentamento imposto

al deflusso dalla marcia, per un tempo non breve, di un veicolo lento, dall'occorrenza di un incidente o dal restringimento di una carreggiata.

Si sono così ottenute informazioni complete e realistiche sull'evoluzione dei fenomeni di traffico indotti dalle perturbazioni, considerate in termini di andamento dei parametri di stato del sistema (eg. lunghezza delle code; ritardi dei veicoli interessati dalle evenienze; tempi occorrenti al ripristino delle condizioni di deflusso ex-ante, ecc. ecc.) ed in funzione di diverse condizioni iniziali di esercizio.

Le risposte fornite dal modello consentono altresì di effettuare analisi di sensitività e confronti prestazionali per valutare le proprietà del sistema sotto ingressi diversamente configurati e sinteticamente rappresentati dai diagrammi di deflusso.

In definitiva l'applicazione del modello appare di evidente utilità pratica perché i risultati che in modo molto agevole da esso si ottengono possono essere alla base di strategie di controllo e di intervento sull'infrastruttura.

## **Bibliografia.**

- [1] Lighthill, M.H. , Whitham, G.B. “*On kinematic waves: II. A theory of traffic flow on long crowded roads.*” Proc. R. Soc. - London (1955)
- [2] Richards , P.I. “*Shock waves on the highway*” Oper. Res. 4 (1):42-51 - (1956)
- [3] Gerlough , D.L. , Huber M.J. “*Traffic flow theory – a monograph*” TRB Spec. Rep. 165 - Washington D.C. (1975)
- [4] Brilon, W. “*Relation between space-time parameters of traffic flow and locally determined parameters on two-lane rural highways.*” Proc. 6<sup>th</sup> Int. Symp. Transp. And Traffic Theory - A.H.&A.W. Reed Pty Ltd., Artamon, N.S.W. (1974)
- [5] Edie, L.C. “*Discussion of traffic stream measurements and definitions.*” Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Symp. Theory Traffic Flow ( London 1963 ) pp. 139-154 - London (1965)
- [6] Daganzo C.F. “*Fundamentals of transportation and traffic operations*” Pergamon Press - Berkeley CA (1997)
- [7] Haberman , R. “*Mathematical models*” Prentice Hall Inc. - New Jersey (1977)
- [8] Leutzbach W. “*Introduction to the theory of traffic flow*” Springer-Verlag – Berlin (1988)
- [9] Accattatis F. “*La propagazione delle perturbazioni nella circolazione omotachica*” Ingegneria Ferroviaria, n.5 – (1992)